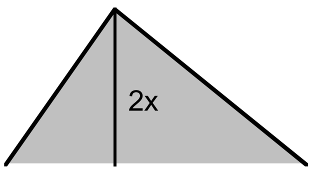
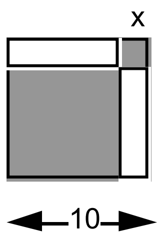
8 3º ESO

«La clave de todo es la paciencia.
Un pollo se obtiene empollando el huevo,
no rompiéndolo.»





División polinomios

ÍNDICE:

1. DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

DIVISIÓN DE MONOMIOS

Se dividen los coeficientes y se simplifican las variables según las reglas de las potencias. Es como simplificar fracciones de potencias.

Si el resultado no es un monomio tendremos una fracción algebraica; es decir el cociente de dos polinomios.

$$\frac{14x^3y^5z^4}{7x^2y^2z}$$

$$\frac{15x^3y}{5xy^2z^3}$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Dividiendo cada término por él. Si en algún término no es posible la división el resultado no sería un polinomio entero sino una fracción algebraica.

$$\frac{12x^4yz^2 - 4ax^2y^3 + 6x^2y}{2x^2y}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

2. DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS

División entera de números naturales: 13 = 5 · 2 + 3

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

En vez de sacar decimales se deja un resto.

D = d · c + r

Dividendo es igual a divisor por cociente más resto.

Esta es la división posible con los polinomios. Si el resto es 0 la división es exacta. El dividendo se dice que es divisible por el cociente o que es múltiplo de él. También es un factor y lo descompone.

El grado del resto es inferior al del divisor.

Ej:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \;\; | \; \underline{x^2 - 3x + 2}$$

En los polinomios como dependen de la variable *x* se pone así:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Completa pues la tabla siguiente para la división anterior:

Dividendo	D(x) =
Divisor	d(x) =
Cociente	c(x) =
Resto	r(x) =

Por tanto según lo anterior quedaría:

$3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 9x - 5 =$

Ejercicio.– Haz la siguiente división: $-3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8 : -x^2 + x$

* Es aplicable la regla del 9. Sería como valorarla en el caso de x=1

3. REGLA DE RUFFINI

Es un método abreviado de división.
Pero sirve **sólo** para dividir un polinomio entre x – a.
Es decir, entre x – 3; x – 7; x ; x + 5 = x –(–5)
¿Cuánto vale *a* en cada caso?

Caso	x – 3	x – 7	x	x + 5	x + 2
Valor de *a*					

Vamos a aplicar la regla al siguiente caso:

$(2x^3 - 6x^2 - 5x - 2) : (x - 4)$

Completa pues la tabla siguiente para la división anterior:

Dividendo: D(x) =	**Divisor:** d(x) =
Resto: r(x) =	**Cociente:** c(x) =

Si falta algún término del polinomio es que su coeficiente es **0**. Como es lógico también hay que ponerlo:

Dividir: $x^3 + 7x^2 - 6 : x + 2$

4. TEOREMAS DEL RESTO Y DEL FACTOR

Estos teoremas no hace falta verlos teóricamente, se pueden obtener de la práctica.

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio P(x) entre (x–a) es igual al valor numérico del polinomio P(x) para x=a; es decir, R=P(a)

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline R & C(x) \end{array}$$

Entonces P(x) = (x–a)·C(x) + R. Sustituyendo en x = a se deduce.

TEOREMA DEL FACTOR

Si un número «a» es raíz de un polinomio entonces «x – a» lo descompone.

Se deduce de lo anterior:

Si hacemos la división anterior tendríamos:

P(x) = (x–a)·C(x) + R.

Sustituyendo en x = a se deduce que R = 0. Es decir, efectivamente lo descompone.

Por ejemplo,

3 es una raíz de $x^2 - 5x + 6$: $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Si dividimos $x^2 - 5x + 6 : x - 3$

resulta: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x - 2)$

Es decir, la factoriza.

Por tanto, para factorizar un polinomio lo primero que tenemos que hacer es buscar sus raíces o soluciones.

Pero atención, este procedimiento sólo me da las raíces enteras de un polinomio. Es decir, que no sirve para encontrar raíces racionales o irracionales.

5. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Se llama raíz de un polinomio o cero del polinomio a un valor que lo anula.

a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a)=0.

Un polinomio puede tener tantas raíces como sea su grado.

6. CÁLCULO DE LAS RAÍCES ENTERAS DE UN POLINOMIO

Se encuentran entre los divisores del término independiente.

7. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios.

Por ejemplo, $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

¿Cómo se factoriza un polinomio?

Al igual que para las números naturales encontrando divisores. Es decir, polinomios que al hacer la división den de resto 0.

Para conseguirlo utilizaremos la regla de Ruffini, buscando polinomios de grado 1 que me den de resto 0 para que lo descomponga.

$x^2 - 5x + 6$	$x^2 + x - 2$

$x^2 + 8x + 7$	$x^2 + 2x + 2$

Hay una regla para saber con que números enteros hay que probar. Para buscar las raíces lo haremos entre los divisores del término independiente.

En el caso del polinomio

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 son las posibles raíces.

En el segundo: $x^3 + x^2 - 5x + 3$

±1, ±3 son las posibles raíces enteras.

Vamos a descomponerlos:

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$:	$x^3 + x^2 - 5x + 3$:

Si no tienen término independiente *x* es un factor directo:

$x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1)$	$x^3 + 3x^2 - x - 3$

A los polinomios que no se pueden descomponer se les llama irreducibles.
Estos son los de grado 1 y los de grado 2 que no tienen raíces.
Por ejemplo, indica si son irreducibles y por qué:

Polinomio	**Irreducible**	**¿Por qué?**
$3x + 6$		
$x^2 - 5x + 6$		
$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$		
$x^2 + x + 1$		

La descomposición factorial de un polinomio está relacionada con sus raíces de la siguiente manera. Por ejemplo, aquí tenemos un polinomio desarrollado y su descomposición factorial. ¿Cuáles son sus raíces o valores que lo anulan?

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0.$

¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

Un polinomio $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$

Ejemplo. - Factorizar el polinomio $4x^3 - 4x^2 - 16x + 16$

8. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Son fracciones de polinomios. Por ejemplo, $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

Escribe el valor que toma la fracción algebraica para los valores indicados:

Fracción	x = 0	x = 1	x = 2
$\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$	$\dfrac{0^2+2\cdot 0+1}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$		
$\dfrac{2x^2-x}{x^2+x+1}$			

Con las fracciones algebraicas se opera como con las fracciones de números enteros. Para sumar y restar primero hay que reducir a común denominador

$$\frac{x+7}{x}+\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}+\frac{(2x-1)x}{(x+1)x}=\frac{(x^2+8x+7)+(2x^2-x)}{x^2+x}=$$

Para multiplicar:

$$\frac{x+7}{x}\cdot\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(x+7)(2x-1)}{x(x+1)}$$

Para dividir:

$$\frac{x+7}{x}:\frac{2x-1}{x+1}=$$

Se puede **simplificar una fracción algebraica** descomponiendo el numerador y el denominador y eliminando los factores comunes. Como con las fracciones numéricas:

$$\frac{x^2+8x+7}{x^2+x}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}=$$